Recasages possibles : 218, 223, 226, 228, 229, 253
Référence : Petit guide de calcul différentiel, Rouvière (p. 140-143).

Développement

Théorème 1 Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(a) < 0 < f(b)$ et $\forall x \in [a,b],\ f'(x) > 0$. On définit la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ par $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ et la suite (u_n) par $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = F(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors,

(i) Il existe un unique $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = 0$. De plus, il existe un intervalle I autour de α tel que pour tout $u_0 \in I$, la suite (u_n) converge quadratiquement vers α.

(ii) Si de plus $f'' > 0$ sur $[a,b]$, alors $[\alpha,b]$ est stable par F, et si $u_0 \in]\alpha,b]$, la suite (u_n) est strictement décroissante et vérifie

$$u_{n+1} - \alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}(u_n - \alpha)^2$$

- Essayons tout d'abord de comprendre d'où vient F. L'idée de la méthode de Newton est de construire une suite approximant une (ou la) solution de l'équation $f(x) = 0$. Fixons $u_0 \in [a,b]$ et notons $\mathcal{C}_f$ le graphe de f. Comme en le point $(u_0, f(u_0))$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ est une approximation linéaire de $\mathcal{C}_f$, on peut supposer que le point d'intersection entre cette tangente et l'axe des abscisses est assez proche d'une solution de $f(x) = 0$. Notons $(u_1, 0)$ ce point d'intersection, par définition u_1 vérifie $0 = f'(u_0)(u_1 - u_0) + f(u_0)$, *i.e* $u_1 = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)}$. On peut réitérer ce procédé avec u_1 et construire $u_2 = u_1 - \frac{f(u_1)}{f'(u_1)}$. Montrons alors que si u_0 a été pris suffisamment proche d'une solution α de $f(x) = 0$, alors la suite ainsi construite va converger vers α.

- *Preuve de (i)* : Comme $f(a) < 0 < f(b)$ et f est continue sur $[a,b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. De plus, comme $f' > 0$ sur $[a,b]$, f est strictement croissante sur $[a,b]$ et donc f est injective. Par conséquent, α est unique. Pour $x \in [a,b]$, appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction f entre α et x : il existe z_x entre α et x tel que
$$0 = f(\alpha) = f(x) + (\alpha - x)f'(x) + \frac{1}{2}(\alpha - x)^2 f''(z_x)$$

Ainsi, en divisant par $f'(x) \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{f(x)}{f'(x)} + (\alpha - x) + \frac{1}{2}(\alpha - x)^2 \frac{f''(z_x)}{f'(x)} \\ i.e \quad F(x) - \alpha &= \frac{1}{2}(x-\alpha)^2 \frac{f''(z_x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

En particulier, comme f est $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, f' et f'' sont continues sur $[a,b]$ qui est compact, donc bornées et en posant $C = \frac{\max_{[a,b]}(|f''|)}{2\min_{[a,b]}(f')}$, on obtient l'inégalité

$$|F(x) - \alpha| \leqslant C|x - \alpha|^2.$$

Choisissons alors $\delta > 0$ suffisamment petit pour que $I = [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset [a,b]$ (possible car $\alpha \in]a,b[$) et $\delta < \frac{1}{C}$ de sorte que $C\delta < 1$. Alors, $x \in I$ implique $|x - \alpha| \leqslant \delta$, donc $|F(x) - \alpha| \leqslant C\delta^2 < \delta$, c'est-à-dire $F(x) \in I$. Ainsi, I est stable par F. Par conséquent, si $u_0 \in I$, alors $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &= |F(u_n) - \alpha| \leqslant C|u_n - \alpha|^2 \\ \text{d'où} \quad |u_n - \alpha| &\leqslant \frac{1}{C}(C\delta)^{2^n} \end{aligned}$$

On obtient $|u_n - \alpha| \underset{+\infty}{=} O\Big((C\delta)^{2^n}\Big)$, et comme $C\delta < 1$, on a bien convergence quadratique de (u_n) vers α.

- *Preuve de (ii)* : On suppose $f'' > 0$ sur $[a,b]$. Alors, on a vu que pour tout $x \in [a,b]$, il existe z_x entre α et x tel que

$$F(x) - \alpha = \frac{1}{2}(x - \alpha^2)\frac{f''(z_x)}{f'(x)} > 0,$$

donc on a $F(x) - \alpha > 0$, *i.e* $F(x) > \alpha$.
De plus, comme $f' > 0$ sur $[a,b]$, f est strictement croissante sur $[a,b]$ donc en particulier, $f(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha,b]$. Ainsi, $\forall x \in]\alpha,b]$,

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} < x.$$

En regroupant ces deux inégalités, on obtient $\forall x \in [\alpha,b]$, $F(x) \in [\alpha,b]$, c'est-à-dire que $[\alpha,b]$ est stable par F. De plus, la deuxième inégalité nous donne que si $u_0 \in]\alpha,b]$, la suite (u_n) est strictement décroissante. Elle est donc minorée (par

α) et décroissante, donc convergente vers un point fixe de F, $i.e$ une solution de $f(x) = 0$: (u_n) converge vers α. Enfin, en notant $z_n = z_{u_n}$, on obtient

$$u_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(u_n - \alpha)^2 \frac{f''(z_n)}{f'(u_n)}.$$

En outre, puisque $\lim u_n = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \leqslant z_n \leqslant u_n$, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim z_n = \alpha$. Comme de plus f' et f'' sont continues en α, on obtient

$$\frac{u_{n+1} - \alpha}{(u_n - \alpha)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(u_n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

On a donc bien obtenu l'équivalent

$$u_{n+1} - \alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}(u_n - \alpha)^2.$$